43. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, με $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=1$. Να δειχθούν οι συνεπαγωγές:

α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=2 \Rightarrow \vec{\alpha}=\vec{\beta}=\vec{\gamma}$

β) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=-2 \Rightarrow \vec{\alpha}=\vec{\gamma}$

γ) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=0 \Rightarrow \alpha=-\vec{\gamma}$

(Πανεπιστήμιο Manchester)

Απόδειξη:

α) Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=2 \Rightarrow |\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|\,\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})+|\vec{\beta}|\,|\vec{\gamma}|\,\text{συν}(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})+\text{συν}(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})=2 \qquad (1)$

Επειδή $-1\leq\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\leq1$ και $-1\leq\text{συν}(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})\leq1$, η (1) δίνει ότι $\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=1$ και $\text{συν}(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})=1$.

Η $\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=1 \Rightarrow \text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\text{συν}0 \Rightarrow (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=0$ (εφόσον $-\pi<(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\leq\pi$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ (2). Επειδή είναι $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$, θα είναι σε συνδυασμό με την (2), $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$ (3).

Με ανάλογη εργασία η συν$(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})=1$ οδηγεί στο ότι $\vec{\beta}\uparrow\uparrow\vec{\gamma}$, που με την $|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|$, δίνει $\vec{\beta}=\vec{\gamma}$ (4). Οι (3) και (4) δίνουν $\vec{\alpha}=\vec{\beta}=\vec{\gamma}$.

β) Έχουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=-2 \Rightarrow |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$συν$(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})+|\vec{\beta}||\vec{\gamma}|$συν$(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})=-2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ συν$(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})+$συν$(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})=-2 \Rightarrow$ συν$(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=-1$ και συν$(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})=-1$ (εφόσον $-1\leq$συν$(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\leq 1$ και $-1\leq$συν$(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})\leq 1$).

Η συν$(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=-1 \Rightarrow$ συν$(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=$συνπ $\Rightarrow (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\pi \Rightarrow \vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$. Επειδή $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$, θα είναι $\vec{\alpha}=-\vec{\beta}$ (5). Η συν$(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})=-1$, με όμοιο τρόπο, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $\vec{\beta}=-\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\gamma}=-\vec{\beta}$ (6). Από (5) και (6), προκύπτει ότι $\vec{\alpha}=\vec{\gamma}$.

γ) Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=0 \Rightarrow |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$συν$(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})+|\vec{\beta}||\vec{\gamma}|$συν$(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})=0 \Rightarrow$ συν$(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})+$ +συν$(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})=0 \Rightarrow$ συν$(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=-$συν$(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}) \Rightarrow$ συν$(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=$συν$[\pi-(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})] \Rightarrow (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\pi-(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}) \Rightarrow (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})+(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})=\pi \Rightarrow (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}})=\pi \Rightarrow \vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\gamma}$ και επειδή $|\vec{\alpha}|=|\vec{\gamma}|$, θα είναι $\vec{\alpha}=-\vec{\gamma}$.

Σημείωση: Είναι $-\pi<(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\leq\pi$ και $-\pi<(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})\leq\pi$.

44. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Αν Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του και $|\vec{AB}|=4$, $|\vec{B\Gamma}|=3$, τότε:

α) Να προσδιοριστούν τα σημεία Μ και Ν, για τα οποία:

$$\vec{MA}+3\vec{MB}=\vec{0},\ \vec{N\Gamma}+3\vec{N\Delta}=\vec{0}$$

β) Να δειχθεί ότι τα Μ, Ν είναι συμμετρικά ως προς το Ο.

γ) Να δειχθεί ότι $|\vec{OM}|=\frac{1}{2}\sqrt{13}$

δ) Αν ισχύει $(\vec{PA}+3\vec{PB})(\vec{P\Gamma}+3\vec{P\Delta})=1$, τότε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Ρ είναι κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα $R=\frac{1}{4}\sqrt{53}$.

(Πανεπιστήμιο Λονδίνου)

Απόδειξη:

α) Είναι $\vec{MA}+3\vec{MB}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{MA}+3(\vec{MA}+\vec{AB})=\vec{0} \Leftrightarrow 4\vec{MA}=-3\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{MA}=-\frac{3}{4}\vec{AB}$ (1)

Από την (1) προσδιορίζουμε το σημείο Μ. Ανάλογα έχουμε:

$$\vec{N\Gamma}+3\vec{N\Delta}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{N\Gamma}+3(\vec{N\Gamma}+\vec{\Gamma\Delta})=\vec{0} \Leftrightarrow 4\vec{N\Gamma}=-3\vec{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \vec{N\Gamma}=-\frac{3}{4}\vec{\Gamma\Delta} \quad (2)$$

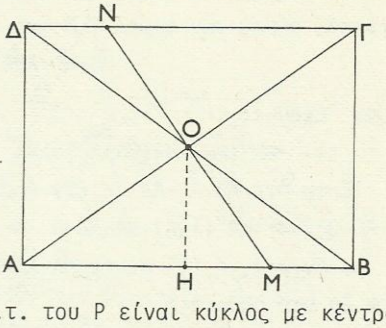
Από τη (2) προσδιορίζουμε το σημείο Ν.

β) Είναι $\vec{OM}+\vec{ON}=(\vec{OA}+\vec{AM})+(\vec{O\Gamma}+\vec{\Gamma N})=\vec{AM}+\vec{\Gamma N}\overset{(1),(2)}{=\!=\!=}\frac{3}{4}\vec{AB}+\frac{3}{4}\vec{\Gamma\Delta}=\frac{3}{4}(\vec{AB}+\vec{\Gamma\Delta})=\frac{3}{4}(\vec{AB}+\vec{BA})=\vec{0}$. Επειδή $\vec{OM}+\vec{ON}=\vec{0}$, τα σημεία Μ και Ν είναι συμμετρικά ως προς το Ο.

γ) Από το Ο φέρνουμε την ΟΗ$\perp$ΑΒ. Είναι $|\vec{OH}|=\frac{1}{2}|\vec{B\Gamma}|=\frac{3}{2}$ (3) και $|\vec{HM}|=\frac{1}{2}|\vec{HB}|=\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}|\vec{AB}|=\frac{1}{4}|\vec{AB}|=\frac{4}{4}=1$. Είναι:

$$|\vec{OM}|^2=|\vec{OH}|^2+|\vec{HM}|^2 \Rightarrow |\vec{OM}|^2=\frac{9}{4}+1 \Rightarrow |\vec{OM}|^2=\frac{1}{2}\sqrt{13} \quad (4)$$

δ) Έχουμε $(\vec{PA}+3\vec{PB})(\vec{P\Gamma}+3\vec{P\Delta})=1 \Leftrightarrow [\vec{PM}+\vec{MA}+3(\vec{PM}+\vec{MB})]\cdot[\vec{PN}+\vec{N\Gamma}+3(\vec{PN}+\vec{N\Delta})]=$
$=1 \Leftrightarrow (4\vec{PM})(4\vec{PN})=1 \Leftrightarrow \vec{PM}\cdot\vec{PN}=\frac{1}{16} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\vec{PO}+\vec{OM})(\vec{PO}+\vec{ON})=\frac{1}{16}$ $(\vec{PO}+\vec{OM})(\vec{PO}-$
$-\vec{OM})=\frac{1}{16} \Leftrightarrow \vec{PO}^2-\vec{OM}^2=\frac{1}{16} \Leftrightarrow \vec{PO}^2=$
$=\vec{OM}^2+\frac{1}{16} \Leftrightarrow \vec{PO}^2\overset{(4)}{=\!=\!=}\frac{13}{4}+\frac{1}{16} \Leftrightarrow \vec{PO}^2=$
$=\frac{52}{16}+\frac{1}{16} \Leftrightarrow |\vec{PO}|^2=\frac{53}{16} \Leftrightarrow |\vec{PO}|=\frac{1}{4}\sqrt{53}$



Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι ο γ.τ. του P είναι κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $R=\frac{1}{4}\sqrt{53}$.

45. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}(2,2,-1)$, $\vec{\beta}(1,-3,2)$, $\vec{\gamma}\left(1,1,-\frac{1}{2}\right)$.

α) Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δυο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μια να έχει τη διεύθυνση του $\vec{\alpha}$.

β) Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

γ) Να εξηγηθεί γιατί το διάνυσμα $\vec{\beta}$ δεν μπορεί να αναλυθεί σε δυο συνιστώσες με διευθύνσεις των $\vec{\alpha}$, $\vec{\gamma}$. (Πανελλήνιες 1981)

Απόδειξη:

α) Έστω $\vec{\beta}_1$, $\vec{\beta}_2$ οι δυο συνιστώσες, τέτοιες που $\vec{\beta}=\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2, \vec{\beta}_1\perp\vec{\beta}_2, \vec{\beta}_1//\vec{\alpha}$.
Έχουμε $\vec{\beta}_1\perp\vec{\beta}_2 \Leftrightarrow \vec{\beta}_1\cdot\vec{\beta}_2=0$, $\vec{\beta}_1//\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\beta}_1=\lambda\vec{\alpha}$, $\lambda\in\mathbf{R}^*$. Έτσι προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases}\vec{\beta}=\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2\\ \vec{\beta}_1=\lambda\vec{\alpha}\\ \vec{\beta}_1\vec{\beta}_2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{\beta}_2=\vec{\beta}-\lambda\vec{\alpha} & (1)\\ \vec{\beta}_1=\lambda\vec{\alpha} & (2)\\ \lambda\vec{\alpha}(\vec{\beta}-\lambda\vec{\alpha})=0 & (3)\end{cases}$$

Η (3) δίνει $\lambda\vec{\alpha}\vec{\beta}-\lambda^2\vec{\alpha}^2=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\lambda|\vec{\alpha}|^2 \Rightarrow \lambda=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2} \Rightarrow \lambda=\frac{2-6-2}{(\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2})^2}$

$$\Rightarrow \lambda=-\frac{2}{3}$$

Η (2) δίνει: $\vec{\beta}_1=-\frac{2}{3}(2,2,-1) \Rightarrow \vec{\beta}_1=\left(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$

Η (1) δίνει: $\vec{\beta}_2=(1,-3,2)+\frac{2}{3}(2,2,-1) \Rightarrow \vec{\beta}_2=\left(\frac{7}{3},-\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right)$

β) Επειδή $\vec{\alpha}=2\vec{\gamma}$, προκύπτει ότι τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικά, άρα γραμμικώς εξαρτημένα. Επομένως και τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

γ) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\gamma}$ σαν συγγραμμικά έχουν την ίδια διεύθυνση, άρα δεν έχουμε δυο διαφορετικές διευθύνσεις κατά τις οποίες μπορούμε να αναλύσουμε το διάνυσμα $\vec{\beta}$.

50. Αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$, τότε είναι $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|\sqrt{3}$.

(Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης - Φυσ/κή σχολή τμηματικές 1963)

Απόδειξη: Είναι $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}| \Leftrightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=|\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\vec{\beta}|^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0 \Rightarrow |\vec{\beta}|^2=-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} \quad (1)$$

Έχουμε:

$$|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2=|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\overset{(1)}{=\!=\!=}|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2+|\vec{\beta}|^2=|\vec{\alpha}|^2+2|\vec{\beta}|^2=|\vec{\alpha}|^2+2|\vec{\alpha}|^2=3|\vec{\alpha}|^2$$

(διότι $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$, άρα και $|\vec{\alpha}|^2=|\vec{\beta}|^2$). Επομένως είναι:

$$|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2=3|\vec{\alpha}|^2 \Rightarrow |\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|\sqrt{3}$$

51. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, αν $\vec{\beta}\perp\vec{\gamma}$, $(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\alpha}})=\frac{\pi}{4}$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{6}$ και $|\vec{\alpha}|=3$, $|\vec{\beta}|=2$, $|\vec{\gamma}|=1$, τότε:

α) Τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ αποτελούν μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$.

β) Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{v}$, συνεπίπεδο των $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και τέτοιο που $|\vec{v}|=3$, $(\widehat{\vec{\beta},\vec{v}})=\frac{\pi}{3}$, $(\widehat{\vec{v},\vec{\gamma}})=\frac{\pi}{6}$. Να δειχθεί ότι $\vec{v}=\frac{3}{4}(\vec{\beta}+2\sqrt{3}\,\vec{\gamma})$.

γ) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\beta}$ και $\vec{u}=-\frac{1}{2}\vec{\beta}+\vec{\gamma}$. Να δειχθεί ότι:

$$\vec{v}=\frac{3}{4}(1+\sqrt{3})\vec{\beta}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\vec{u}.$$

(από το βιβλίο του R. Levis, Roma 1976).

Απόδειξη:

α) Για να αποτελούν τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ βάση του $\mathcal{E}$, πρέπει να μην είναι συνεπίπεδα. Υποθέτουμε ότι τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι συνεπίπεδα. Τότε είναι:

$$(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})+(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\alpha}})+(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=2\pi \quad (1)$$

Επειδή $\vec{\beta}\perp\vec{\gamma}$ είναι $(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})=\frac{\pi}{2}$, από την υπόθεση είναι $(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\alpha}})=\frac{\pi}{4}$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=$ $=\frac{\pi}{6}$. Η (1) γράφεται επομένως: $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=2\pi \Leftrightarrow \frac{10\pi}{12}=2\pi$, που είναι αδύνατο. Επομένως τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ σαν μη συνεπίπεδα διανύσματα, αποτελούν βάση του $\mathcal{E}$.

β) Τα διανύσματα $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, γιατί $\vec{\beta}\not\parallel\vec{\gamma}$. Άρα: $\vec{v}=\lambda\vec{\beta}+\mu\vec{\gamma}$ (2), $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$. Η (2) δίνει:

$$\begin{cases} \vec{v}\cdot\vec{\beta}=\lambda\vec{\beta}^2+\mu\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta} \\ \vec{v}\cdot\vec{\gamma}=\lambda\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\mu\vec{\gamma}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{v}|\,|\vec{\beta}|\,\text{συν}(\widehat{\vec{v},\vec{\beta}})=\lambda\cdot 2^2+\mu\cdot 0 \\ |\vec{v}|\,|\vec{\gamma}|\,\text{συν}(\widehat{\vec{v},\vec{\gamma}})=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 1^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\cdot 2\,\text{συν}\frac{\pi}{3}=4\lambda \\ 3\cdot 1\,\text{συν}\frac{\pi}{6}=\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=\frac{3}{4} \\ \mu=\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad (3)$$

Η (2) γράφεται, δυν. (3): $\vec{v}=\frac{3}{4}\vec{\beta}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{v}=\frac{3}{4}(\vec{\beta}+2\sqrt{3}\,\vec{\gamma})$.

γ) Τα διανύσματα $\vec{\beta}$ και $\vec{u}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα*. Άρα:

$$\vec{v}=\lambda\vec{\beta}+\mu\vec{u} \quad (4), \quad \lambda,\mu\in\mathbf{R}$$

Είναι $\vec{v}=\lambda\vec{\beta}-\frac{1}{2}\mu\vec{\beta}+\mu\vec{\gamma}$ (διότι $\vec{u}=-\frac{1}{2}\vec{\beta}+\vec{\gamma}$) $\Leftrightarrow \vec{v}=\left(\lambda-\frac{1}{2}\mu\right)\vec{\beta}+\mu\vec{\gamma} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}\cdot\vec{\beta}=\left(\lambda-\frac{1}{2}\mu\right)\vec{\beta}^2+\mu\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta} \\ \vec{v}\cdot\vec{\gamma}=\left(\lambda-\frac{1}{2}\mu\right)\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\mu\vec{\gamma}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{v}|\,|\vec{\beta}|\,\text{συν}(\widehat{\vec{v},\vec{\beta}})=\left(\lambda-\frac{1}{2}\mu\right)\vec{\beta} \quad (\text{διότι } \vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}=0) \\ |\vec{v}|\,|\vec{\gamma}|\,\text{συν}(\widehat{\vec{v},\vec{\gamma}})=\mu \quad (\text{διότι } |\vec{\gamma}|=1). \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\cdot 2\,\text{συν}\frac{\pi}{3}=\left(\lambda-\frac{1}{2}\mu\right)4 \\ 3\cdot 1\,\text{συν}\frac{\pi}{6}=\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3=4\lambda-2\mu \\ \mu=\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=\frac{3}{4}(1+\sqrt{3}) \\ \mu=\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Άρα η (4) γράφεται: $\vec{v}=\frac{3}{4}(1+\sqrt{3})\vec{\beta}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\vec{u}$.

Άλυτη

54. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}(-1,2,1)$, $\vec{\beta}(1,2,1)$. Έστω ότι (Ρ) είναι το επίπεδο των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και (Π) είναι ένα επίπεδο κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\gamma}(3,4,5)$. Να βρεθεί ένα διάνυσμα $\vec{\delta}$, με μέτρο 1, παράλληλο προς την τομή (ε) των επιπέδων (Ρ) και (Π).

Υπόδειξη: Έστω $\vec{\delta}(x,\psi,z)$ το ζητούμενο διάνυσμα. Αρκεί να βρούμε τα x, ψ, z. Είναι $\vec{\delta}\,//\,(\varepsilon)$. Άρα $\vec{\delta}\,//\,(P)$ και $\vec{\delta}\,//\,(\Pi)$ και ακόμα $|\vec{\delta}|=1$.

56. Θεωρούμε τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}|\vec{\alpha}|$ (1), $(\sqrt{3}+1)\vec{\alpha}-\sqrt{3}\,\vec{\beta}=\vec{\gamma}$ (2)

Να βρεθούν οι γωνίες $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ και $(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})$.

(Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης τμηματικές εξετάσεις 1967)

Λύση: Υποθέτουμε ότι $|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=\rho$, με $\rho\in\mathbb{R}_+^*$, τότε η (1) δίνει:

$$|\vec{\alpha}|=\rho(\sqrt{3}-1) \quad (3)$$

Η (2) δίνει: $[(\sqrt{3}+1)\vec{\alpha}-\sqrt{3}\,\vec{\beta}][(\sqrt{3}+1)\vec{\alpha}-\sqrt{3}\,\vec{\beta}]=\vec{\gamma}\cdot\vec{\gamma} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\sqrt{3}+1)^2|\vec{\alpha}|^2-2\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+1)\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+3|\vec{\beta}|^2=|\vec{\gamma}|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4+2\sqrt{3})|\vec{\alpha}|^2-2(3+\sqrt{3})|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})+3|\vec{\beta}|^2=|\vec{\gamma}|^2 \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\delta\upsilon\nu\ (3)} (4+2\sqrt{3})\rho^2(\sqrt{3}-1)^2-2(3+\sqrt{3})\rho(\sqrt{3}-1)\rho\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})+3\rho^2=\rho^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})\rho^2-2(3+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)\rho^2\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})+3\rho^2=\rho^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (16-12)-2(3\sqrt{3}+3-3-\sqrt{3})\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})+3=1 \Rightarrow 4-2(2\sqrt{3})\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2-2\sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=-1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{3}{2\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{3\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Επειδή $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\in(-\pi,\pi]$, θα είναι $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{6}$ ή $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=-\frac{\pi}{6}$

Για να υπολογίσουμε τη γωνία $(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})$, εργαζόμαστε ως εξής: Η (2) γράφεται:

$$(\sqrt{3}+1)\vec{\alpha}=\sqrt{3}\,\vec{\beta}+\vec{\gamma} \Rightarrow [(\sqrt{3}+1)\vec{\alpha}][(\sqrt{3}+1)\vec{\alpha}]=[\sqrt{3}\,\vec{\beta}+\vec{\gamma}][\sqrt{3}\,\vec{\beta}+\vec{\gamma}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4+2\sqrt{3})|\vec{\alpha}|^2=3|\vec{\beta}|^2+\sqrt{3}\,\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\sqrt{3}\,\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+|\vec{\gamma}|^2 \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\delta\upsilon\nu\ (3)} (4+2\sqrt{3})\rho^2(\sqrt{3}-1)^2=3\rho^2+2\sqrt{3}\,|\vec{\beta}||\vec{\gamma}|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})+\rho^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})\rho^2=3\rho^2+2\sqrt{3}\,\rho^2\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})+\rho^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\rho^2=4\rho^2+2\sqrt{3}\,\rho^2\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})=0$$

Επειδή $(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})\in(-\pi,\pi]$, θα είναι $(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})=\frac{\pi}{2}$ ή $(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})=-\frac{\pi}{2}$.

58. Αν το σύνολο $\{\vec{\alpha},\vec{\beta}\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{P}$, να λυθεί η εξίσωση:

$$[(-\vec{\alpha}\cdot\vec{x})-2(\vec{\beta}\cdot\vec{x})]\vec{\alpha}+[(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})-(\vec{\beta}\cdot\vec{x})]\vec{\beta}=\vec{0} \qquad (1)$$

όπου $\vec{x}$ άγνωστο διάνυσμα του $\mathcal{P}$ και $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ γνωστά διανύσματα.

(Bacalaureat Μασσαλίας)

Λύση: Επειδή τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ αποτελούν βάση του $\mathcal{P}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Άρα η (1) δίνει:

$$\left\{\begin{array}{l}(-\vec{\alpha}\cdot\vec{x})-2(\vec{\beta}\cdot\vec{x})=0\\ \text{και}\\ (\vec{\alpha}\cdot\vec{x})-(\vec{\beta}\cdot\vec{x})=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-\vec{\alpha}\cdot\vec{x}-2\vec{\alpha}\cdot\vec{x}=0\\ \text{και}\\ \vec{\alpha}\cdot\vec{x}=\vec{\beta}\cdot\vec{x}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}3\vec{\alpha}\cdot\vec{x}=0\\ \text{και}\\ \vec{\alpha}\cdot\vec{x}=\vec{\beta}\cdot\vec{x}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\vec{\alpha}\cdot\vec{x}=0\\ \text{και}\\ \vec{\beta}\cdot\vec{x}=0\end{array}\right. \quad (2)$$

Είναι $\vec{x}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ (3) $(\kappa,\lambda\in\mathbf{R})$. Η (3) δίνει $\vec{x}\cdot\vec{x}=(\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta})\vec{x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\vec{x}|^2=\kappa\vec{\alpha}\cdot\vec{x}+\lambda\vec{\beta}\cdot\vec{x} \xrightarrow{(2)} |\vec{x}|^2=0 \Rightarrow |\vec{x}|=0 \Rightarrow \vec{x}=\vec{0}$$

Επομένως η (1) έχει τη λύση $\vec{x}=\vec{0}$.

59. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, για τα οποία ισχύουν $(\widehat{\vec{w},\vec{v}})=\frac{\pi}{2}$, $|\vec{u}|=1$, $|\vec{v}|=2$, $|\vec{w}|=3$ και $(\widehat{\vec{w},\vec{u}})=(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{\pi}{3}$. Να δειχθεί ότι:

α) Τα $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

β) Αν $\vec{\alpha}$ είναι ένα διάνυσμα συνεπίπεδο των $\vec{v}$ και $\vec{w}$, με $|\vec{\alpha}|=1$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{v}})=(\widehat{\vec{\alpha},\vec{w}})=\frac{\pi}{4}$, τότε είναι $\vec{\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{12}(3\vec{v}+2\vec{w})$.

γ) Αν $\vec{r}$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στα $\vec{v}$ και $\vec{w}$ με $|\vec{r}|=1$, τότε είναι $\vec{r}=\sqrt{2}\,\vec{u}-\frac{\sqrt{2}}{4}\vec{v}-\frac{\sqrt{2}}{6}\vec{w}$ ή $\vec{r}=-\sqrt{2}\,\vec{u}+\frac{\sqrt{2}}{4}\vec{v}+\frac{\sqrt{2}}{6}\vec{w}$.

Απόδειξη:

α) Υποθέτουμε ότι τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ είναι συνεπίπεδα, τότε θα είναι $(\widehat{\vec{w},\vec{v}})=(\widehat{\vec{w},\vec{u}})+(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$ ή θα είναι $(\widehat{\vec{w},\vec{v}})=|(\widehat{\vec{w},\vec{u}})-(\widehat{\vec{u},\vec{v}})|=\left|\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right|=0$. Από την υπόθεση όμως είναι $(\widehat{\vec{w},\vec{v}})=\frac{\pi}{2}$. Άρα τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ δεν είναι συνεπίπεδα, επομένως είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

β) Επειδή το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι συνεπίπεδο των $\vec{v}$ και $\vec{w}$, θα υπάρχουν $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$, ώστε $\vec{\alpha}=\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}$ (1) $\Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{v}=(\lambda\vec{v}+\mu\vec{w})\vec{v} \Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\lambda\vec{v}^2+\mu\vec{v}\cdot\vec{w} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\vec{\alpha}||\vec{v}|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{v}})=\lambda|\vec{v}|^2+\mu|\vec{v}||\vec{w}|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{w},\vec{v}}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1\cdot 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\lambda 2^2+\mu 2\cdot 3\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{2}=4\lambda \Rightarrow \lambda=\frac{\sqrt{2}}{4} \qquad (2)$$

Η (1) δίνει: $\vec{\alpha}\cdot\vec{w}=(\lambda\vec{v}+\mu\vec{w})\vec{w} \Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{w}=\lambda\vec{v}\cdot\vec{w}+\mu\vec{w}^2 \Rightarrow |\vec{\alpha}|\,|\vec{w}|\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{w}})=$
$=\lambda|\vec{v}|\,|\vec{w}|\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{v},\vec{w}})+\mu|\vec{w}|^2 \Rightarrow 1\cdot 3\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\lambda 2\cdot 3\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}+\mu 3^2 \Rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{2}=9\mu \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mu=\frac{\sqrt{2}}{6} \quad (3)$$

Η (1) δυν. (2), (3), δίνει: $\vec{\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{4}\vec{v}+\frac{\sqrt{2}}{6}\vec{w}$.

γ) Υποθέτουμε ότι $\vec{r}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}$ (4). Από την υπόθεση είναι:

$$\begin{cases}\vec{r}\cdot\vec{v}=0\\ \vec{r}\cdot\vec{w}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w})\vec{v}=0\\ (\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w})\vec{w}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha\vec{u}\cdot\vec{v}+\beta\vec{v}^2+\gamma\vec{w}\cdot\vec{v}=0\\ \alpha\vec{u}\cdot\vec{w}+\beta\vec{v}\cdot\vec{w}+\gamma\vec{w}^2=0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{u},\vec{v}})+\beta|\vec{v}|^2+\gamma|\vec{w}|\,|\vec{v}|\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{w},\vec{v}})=0\\ \alpha|\vec{u}|\,|\vec{w}|\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{u},\vec{w}})+\beta|\vec{v}|\,|\vec{w}|\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{v},\vec{w}})+\gamma|\vec{w}|^2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha 1\cdot 2\frac{1}{2}+\beta 4=0\\ \alpha 1\cdot 3\frac{1}{2}+\gamma 9=0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha+4\beta=0\\ 3\alpha+18\gamma=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta=-\frac{\alpha}{4}\\ \gamma=-\frac{\alpha}{6}\end{cases} \quad (5)$$

Είναι $|\vec{r}|=1 \Rightarrow |\vec{r}|^2=1 \Rightarrow \vec{r}^2=1 \xRightarrow{(4),(5)} \alpha^2\left(\vec{u}-\frac{1}{4}\vec{v}-\frac{1}{6}\vec{w}\right)^2=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha^2\left(\vec{u}^2+\frac{1}{16}\vec{v}^2+\frac{1}{36}\vec{w}^2-\frac{1}{2}\vec{u}\cdot\vec{v}-\frac{1}{3}\vec{u}\cdot\vec{w}+\frac{1}{12}\vec{v}\cdot\vec{w}\right)=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^2\left[|\vec{u}|^2+\frac{1}{16}|\vec{v}|^2+\frac{1}{36}|\vec{w}|^2-\frac{1}{2}|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{u},\vec{v}})-\frac{1}{3}|\vec{u}|\,|\vec{w}|\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{u},\vec{w}})+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{12}|\vec{v}|\,|\vec{w}|\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{v},\vec{w}})\right]=1 \Rightarrow \alpha^2\left(1+\frac{1}{16}4+\frac{1}{36}9-\frac{1}{2}1\cdot 2\frac{1}{2}-\frac{1}{3}1\cdot 3\frac{1}{2}-\frac{1}{12}2\cdot 3\cdot 0\right)=$$
$=1 \Rightarrow \alpha^2=2 \Rightarrow \alpha=\pm\sqrt{2}$ (6).

Η (4), δυν. (5) και (6), δίνει:

$$\vec{r}=\sqrt{2}\,\vec{u}-\frac{\sqrt{2}}{4}\vec{v}-\frac{\sqrt{2}}{6}\vec{w} \quad ή \quad \vec{r}=-\sqrt{2}\,\vec{u}+\frac{\sqrt{2}}{4}\vec{v}+\frac{\sqrt{2}}{6}\vec{w}$$